exempel: Antag att vi har 3 olika belastningar och 4 prov i varje. I S → N koordinatsystemet prickar vi in de 12 värdena och får 4 P-linjer. (Se fig 4). Man uppställer nu analytiska uttryck f_P (S, N) innehållande ett antal parametrar däribland även E-värdet för varje P-linje och beräkna på så sätt som nedan visas värdena på dessa parametrar. Härigenom har man fått extrapoleringsformler så att man kan beräkna S-värdena för ett antal N-värden, däribland även $N = \infty$. För ett givet N-värde är sambandet mellan P och S fördelningsfunktionen $P = F_N (S)$. Man uppställer då analytiska uttryck även för dessa funktioner, innehållande parametrar däribland även U_N, som bestämmas på så sätt som nedan visas. Ur dessa formler beräknar man de sålunda utjämnade värdena på S för de valda N-värdena. Härigenom har man fått N-kurvorna i fält 2 och beräknar ur dessa korrigerade värden på parametrarna för P-linjerna. Man kan även från N-kurvorna i fält 2 genom grafisk konstruktion erhålla P-kurvorna i fält 1.

Denna procedur skall demonstreras på ett aktuellt exempel i det efterföljande.

S-N-relationen. (Fält 1.)

Vi utgå från att varje provstav har en individuell utmattningsgräns E. Om staven belastas med en växelspänning $S \leqq E$, kommer den att tåla ett obegränsat antal spänningsväxlingar. Om belastningen ligger över utmattningsgränsen brister staven efter ett ändligt antal växlingar. Ju större differensen S − E är, desto mindre blir livslängden. Vi kunna då till en början göra det plausibla antagandet att ju högre den individuella utmattningsgränsen E hos en stav är desto större blir livslängden vid varje belastning S. Detta är alls icke självklart men det är liktydigt med att inga av P-kurvorna i fält 1 skär varandra. Vi skola antaga att detta antagande gäller. Detta innebär att om man ordnar proven för ett givet S efter stigande värden på N så bli de också ordnade efter stigande värden på E. Om man således från varje rad (μ = konst) plockar ut, alla värden med samma P-värde, ett från varje rad, så kan man förutsätta, att alla motsvarande stavar sannolikt haft samma individuella utmattningsgräns E. Om alla rader har samma antal värden, n, (i tab. I, n = 20) blir ett konstant P detsamma som ett konstant v eftersom $P = \frac{v}{n+1}$ och alla värden med samma v (se tab. I) ha approximativt samma individuella utmattningsgräns E.

För sambandet mellan S och N vid konstant P gör vi nu ansatsen

$$N = k\,(S - E)^{-m} \qquad (14)$$

eller

$$\log N = \log k - m \log (S - E) \qquad (15)$$

Med beteckningarna

$$y = \log N;\ a = \log k;\ x = \log (S - E) \qquad (16)$$

får man

$$y = a - m\,x \qquad (17)$$

Här äro de tre parametrarna k, m och E funktioner av P d.v.s. konstanta för ett givet P-värde men i allmänhet olika för de olika P-kurvorna.

Hur dessa kan beräknas ur försöksvärdena framgår av det efterföljande.

P-S-relationen. (Fält 2.)

Det torde vara säkert att det icke är möjligt att på förhand utan experimentella undersökningar uppställa det analytiska uttrycket för den verkliga fördelningsfunktion. Detta inkluderar således att man icke har rättighet att à priori antaga att denna fördelning är Gaussk eller s.k. normalfördelning. Tvärtom, jag skall strax framlägga ett par skäl för motsatsen.

För övrigt tror jag att allt tal om den riktiga fördelningsfunktionen är meningslöst. Beviset för att en fördelningsfunktion är den riktiga kan ju endast ske experimentellt och skulle tarva ett oändligt antal försöksvärden eller i varje fall ett så stort antal att det skulle bli praktiskt taget omöjligt att genomföra.

Om antalet försöksvärden är så begränsat som det måste bli vid hållfasthetsundersökningar och speciellt vid utmattningsprov kan man med en mångfald fördelningsfunktioner som innehålla tillräckligt många, låt oss säga tre, parametrar, bestämma värdet på dessa så att de alla på ett tillfredsställande sätt reproducerar de experimentella värdena som alltid uppvisa betydande spridning.

Det förefaller [illegible]

så långt att jag skulle vilja påstå att om man till äventyrs kände den riktiga fördelningsfunktionen det vore bättre att ersätta denna med ett approximativt riktig som medgåve en enklare matematisk behandling, förutsatt att den fyller vissa nödvändiga kvalifikationer.

Om vi nu studerar de allmänna egenskaperna hos fördelningsfunktionen F(S) så se vi till en början att den måste vara en monoton, icke-avtagande funktion av S med värdet 0 för ett givet värde U som ej med nödvändighet behöver = 0 och värdet 1 för $S \to \infty$. Utan att inskränka på allmängiltigheten kan vi skriva

$$F(S) = 1 - e^{-\varphi(S)} \quad \ldots\ldots (18)$$

eftersom vi för varje given funktion F lätt kunna beräkna motsvarande funktion φ enligt formeln

$$\varphi = -\log(1 - F) \quad \ldots\ldots (19)$$

Uppenbarligen måste $\varphi(S)$ vara en positiv, icke-avtagande funktion av S med gränsvillkoren

$$\varphi(S) = 0 \text{ för } S \leq U \quad \ldots\ldots (20)$$

och

$$\varphi(S) = \infty \text{ för } S \to \infty \quad \ldots\ldots (21)$$

Ekvation(20)har den viktiga innebörden, att det existerar en spänning $U \geq 0$, under vilken sannolikheten för brott = 0. Det torde icke kunna betvivlas att detta villkor motsvarar en reell egenskap hos alla förefintliga fasta material.

Det har ofta gjorts gällande att fördelningsfunktionen skulle vara normal bl.a. av Frenkel och Kontorova eftersom den normala fördelningen "is the nature's own distribution". Denna har formen

$$\phi(S) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(S - S_m)^2}{a^2}} dS \quad \ldots\ldots (22)$$

och satisfierar således icke villkoret (20), eftersom $\phi(0) \neq 0$ eller m.a.o. även för S = 0 föreligger en viss ändlig sannolikhet för brott vilket säkert är felaktigt. Fördelningsfunktionen (22) kan således på sin höjd vara approximativt riktig.

Man kan visserligen ersätta S med en funktion, som för $S = U$ tenderar mot $-\infty$ t.ex. $\log (S - U)$. Men det finnes otaliga andra substitutionsmöjligheter, som satisfiera villkoret (20) och vilken av alla dessa "is the nature's own"?

Fördelen att skriva fördelningsfunktionen i den i ekv. (18) givna formen ligger däri att funktionen $e^{\varphi(S)} = 1 - F(S)$ reproducerar sig själv genom multiplikation eftersom

$$\left[1 - F(S)\right]^{n} = e^{-n \cdot \varphi(S)} \qquad (23)$$

Detta är en mycket värdefull egenskap vid hållfasthetsproblem. Ty förändring av provstavens längd medför en mycket enkel modifikation av fördelningsfunktionen. Om denna för en godtyckligt antagen enhetslängd har formen (18), så blir fördelningsfunktionen $F_L(S)$ för en godtycklig längd L, som senare visas

$$F_L(S) = 1 - e^{-L \cdot \varphi(S)} \qquad (24)$$

Härvid förändras således icke funktion φ och således bli de i denna funktion ingående parametrarna även oförändrade till sitt värde. Denna egenskap medger en bekväm grafisk framställning. Om man med hänsyn till ekv. (1), (8) och (24) sätter

$$P_v = \frac{v}{n + 1} = 1 - e^{-L \cdot \varphi(S_v)} \qquad (25)$$

så får man efter dubbel logaritmering

$$\log \log \frac{1}{1 - P_v} = \log L + \log \varphi(S_v) \qquad (26)$$

I ett koordinatsystem med ordinatan $\log \log \frac{1}{1 - P}$ och abcissan S prickar in de n värdeparen och drar genom dessa punkter en utjämnad kurva (se fig 5) så kommer en förändring i L endast att medföra en parallellförflyttning av kurvan utan formförändring hur den än ser ut. Om den nya längden är L_1 blir förflyttningen $= \log L_1 - \log L$.

Har man två serier med olika diametrar och lägger in värdena i detta koordinatsystem så får man en omedelbar uppfattning på grund av avståndet mellan de båda kurvorna om man exempelvis har en volyms-effekt, då förflyttningen blir lika med $2 \log D$ eller en yteffekt då förflyttningen blir $\log D$ eller ev. något annat inflytande av diametern D.

Den normala fördelningens karaktär bibehålles vid addition men det är i föreliggande fall icke någon fördel. En multiplikation i enlighet med (23) av en normal fördelning ger icke som resultat en ny normal fördelning. Antag att man funnit att för en viss längd L_0 fördelningen är normal och lika med Φ_0 (S). För längden L får man då fördelningen Φ_L bestämd av relationen

$$1 - \Phi_L = \left[1 - \Phi_0\right]^{\frac{L}{L_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

eller

$$\Phi_L = 1 - \left[1 - \Phi_0\right]^{\frac{L}{L_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Enligt ekv. (22) blir således

$$\Phi_L = 1 - \left[1 - \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(S - S_m)^2}{a^2}} dS\right]^{\frac{L}{L_0}} \quad \ldots\ldots (29)$$

vilket icke är en normal fördelning och dessutom icke något särskilt lätthanterligt uttryck. Man kommer således till det resultatet, att om man för en viss längd av staven funnit att fördelningen är normal så är den icke normal för någon annan stavlängd.

Om vi nu återvänder till den i ekv. (18) givna formen på fördelningsfunktion så måste vi göra en ansats för funktion $\varphi(S)$. Eftersom den bör vara monotont stigande så kan man försöksvis sätta, vilket i många fall visat sig utmärkt återge verkligheten

$$\varphi(S) = k\,(S - U)^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

varav

$$P = 1 - e^{-k\,(S - U)^m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

vilket ger

$$\log\log\frac{1}{1 - P} = \log\log\frac{n + 1}{n + 1 - v} = \log k + m\log(S + U)$$

$$\ldots\ldots\ldots (32)$$

eller om

$$y = \log\log\frac{1}{1 - P};\ a = \log k;\ x = \log(S - U) \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

blir

$$y = a + mx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Man har således tre parametrar k, m och U att disponera över. Hur dessa kan beräknas ur försöksvärdena framgår av det efterföljande. Om antalet mätvärden är litet, som fallet i allmänhet är vid hållfasthetsprov, säg $n < 100$, så kan man med tillfredsställande noggrannhet återge mätresultaten med ovanstående formel. Om detta är den "riktiga" fördelningen eller icke kan man icke avgöra och det saknar på det hela taget praktisk betydelse. Viktigare är att man kan ansluta kurvan till mätvärdena med mindre avvikelser än med andra fördelningar, inklusive den normala.

Det må emellertid påpekas att man i somliga fall kan finna att man måste dela upp mätvärdena i olika områden inom vilka var för sig ekv. (30) kan användas. Detta utvisar att materialet icke varit statistiskt enhetligt eller också företett en kombination av volyms- och ytinflytande.

Volymeffekten.

Den ursprungliga avsikten med den statistiska hållfasthetsteorien var att lämna en förklaring till det sedan länge kända faktum att hållfastheten minskas med växande dimensioner. samt att t.ex. böjhållfastheten i regel är högre än draghållfastheten. Så vitt jag vet var det icke förut känt att dessa båda fenomen äro intimt förbundna med varandra och att de kunna förklaras enligt samma princip nämligen genom statistiska betraktelser.

Om man antar att fördelningsfunktionen $F_1(S)$ för en stav med längden L_1 är given [illegible] så kan man lätt bestämma fördelningsfunktionen $F_2(S)$ för en stav med dubbla längden $2L_1$ ty för en given spänning S är uppenbarligen sannolikheten att den ena halvan L_1 icke skall gå sönder $1 - F_1(S)$ och för den andra, identiska halvan L_1 ävenledes $1 - F_1(S)$. Sannolikheten för att båda samtidigt d.v.s. staven i sin helhet skall hålla blir således

$$1 - F_2(S) = \left[1 - F_1(S)\right]^2 \qquad \text{.........................(35)}$$

eller

$$F_2(S) = 1 - \left[1 - F_1(S)\right]^2 \qquad \text{.........................(36)}$$

Man får generellt för en godtycklig längd L

$$F_L(S) = 1 - \left[1 - F_1(S)\right]^{\frac{L}{L_1}} \qquad \text{.........................(37)}$$

Eftersom tvärsnittsarean är konstant blir volymerna v proportionella mot längderna L och man kan i detta fall sätta

$$F_V(S) = 1 - \left[1 - F_1(S)\right]^{\frac{V}{V_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Härledningen av ekv. (37) förutsätter ingen kännedom om materialets egenskaper eller dess likformighet inom tvärsnittsarean, endast att materialet är statistiskt identiskt för lika stora längder av staven, varmed menas att fördelningsfunktionerna äro lika. Denna "the weakest link principle" kan därför närmast betraktas som en matematisk angelägenhet och icke en fysikalisk.

Förhållandet blir helt annorlunda om man ändrar stavens diameter. Det har visserligen förut påvisats att om man parallellkopplar de båda stavarna så kan man tillämpa samma resonnemang som vid seriekopplade stavar och kommer även då till ekv. (38) ty när den ena staven brister kommer belastningen på den andra staven att fördubblas och sannolikheten för att den skall tåla denna belastning är i de flesta fall praktiskt taget försvinnande liten.

Det är däremot icke säkert att förhållandet blir detsamma om man låter de båda stavarna smälta ihop till en med dubbla tvärsnittsarean. Det är icke uteslutet - och det finnes material, som har den härför nödvändiga egenskapen - att brottrisken är så att säga likformigt fördelad över tvärsnittsarean d.v.s. att brottet kan börja var som helst inom denna yta. Skulle däremot brottrisken vara koncentrerad till ett ytlager, vars tjocklek vore oberoende av stavens diameter D, så skulle icke volymen $V = L \cdot D^2$ utan mantelytan $A = LD$ ersätta V i ekv. (38). En kombination av volym- och yteffekt finnes, som förut visats, t.ex. vid glaserade porslinstavar. I varje fall är det ingen trivial angelägenhet, (som vid variation av längden L) att bestämma inflytandet av diametern D ty därigenom får man vissa upplysningar om materialets fysikaliska egenskaper.

En svårighet kan härvid uppstå. Det är nämligen icke uteslutet att diametern inverkar icke blott så att säga geometriskt utan den kan även påverka materialets egenskaper. Så är t.ex. fallet vid gjutjärn, där en minskad diameter i regel medför en materialförbättring. Det blir i så fall nödvändigt att skilja på de båda effekterna, volymeffekten och materialförändringen.

Man kan även tänka sig en bearbetning av staven, som är sådan att brottrisken koncentreras till ytskiktet, i vilket fall ekv. (38) även modifieras.

Beräkning av parametrarna.

Om man för ett antal belastningar S_μ där $1 \leq \mu \leq i$ erhållit livslängderna N_v där $1 \leq v \leq n$ så ordnar man de senare efter stigande värden, så att $N_v \leq N_{v+1}$ och uppställer dem i tabellform (se tab. I).

Varje kolumn (v = konst) kan under förut angivna förutsättningar anses svara mot provstavar med samma utmattningsgräns E. För varje kolumn gäller således ekv. (14) vars parametrar k, m och E man först bestämmer.

Man börjar med att inpricka i ett koordinatsystem med ordinatan log S och abscissan log N de i värdeparen för kolumnen i fråga. Skulle därvid värdena för stora N med normal spridning ligga på en rät linje visar detta att utmattningsgränsen E = 0. I allmänhet finner man att värdena ligger på en kurva, som är konkav uppåt. Man insätter då på försök olika värden på E. Om det valda värdet är större än det verkliga blir kurvan konkav nedåt. Man söker sig så fram till ett värde, som ger en i huvudsak rät linje. Detta val blir, i synnerhet om spridningen är stor, tämligen subjektivt, men dock tillräckligt noggrannt för att bedöma om S-N-kurvan är enhetlig. Emellanåt finner man nämligen att kurvan består av två eller flera räta linjer, som träffas i en markerad diskontinuitetspunkt. På ömse sidor om denna punkt beter sig materialet på olika sätt och det vore uppenbarligen meningslöst att söka en gemensam ekvation för båda områdena.

För varje enhetligt område kan man med en numerisk metod bestämma ett objektivt och noggrannare värde på E genom att bestämma korrelationen mellan S_μ och N_μ inom en kolumn (v = konst). Det är tydligt att om ingen spridning förelåge och ekv. (14) är giltig så skulle punkterna (x, y) enligt (17) ligga exakt på en rät linje och korrelationen skulle vara fullständig d.v.s. korrelationskoefficienten $r = 1$. Varje krökning av linjen och således varje förändring av E från det rätta värdet medför en minskning av r. Metoden består därför däri att man för ett antal värden på E bestämmer motsvarande värde r och antager som det rätta värdet på E det som gör r till ett maximum. Uttrycket för r är

$$r = \frac{\sum x \cdot y - \frac{\sum x \cdot \sum y}{i}}{\sqrt{\left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{i}\right]\left[\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{i}\right]}} \quad \ldots\ldots\ldots(39)$$

där betydelsen av x och y framgår av ekv. (17) varav framgår att en förändring av E endast påverkar x men icke y som bestämmes enbart av belastningarna. Dessa beräkningar utföras bäst med hålkortsmaskiner.

När man på detta sätt bestämt E kan man beräkna a och m enligt minsta kvadratmetoden, som ger

$$a = \frac{\Sigma y \cdot \Sigma x^2 - \Sigma xy \cdot \Sigma x}{i\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}; \quad m = \frac{i\,\Sigma xy - \Sigma y\,\Sigma x}{i\,\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(40)$$

Sedan man sålunda bestämt a, m och E för de n kolumnerna har man skaffat sig extrapoleringsformler för att beräkna sambandet mellan P och S för ett konstant N-värde m.a.o. ett vertikalsnitt genom kurvskaran i fält 1, fig 3. Man väljer då lämpligen tre sådana snitt, varav det ena för $N = \infty$, vilket svarar mot de beräknade E-värdena, det andra för minsta N-värde, som visat sig ligga inom ett enhetligt område och det tredje någonstans mellan dessa båda värden. I varje sådant snitt beräknar man de S-värden som svara mot $P = \frac{v}{n + 1}$ till ett antal av n. Sambandet mellan S och P antages följa ekv. (31).

För bestämning av parametrarna k, m och U i dessa P-S-kurvor förfar man på samma sätt som angivits för S-N-kurvorna. Man undersöker först grafiskt enhetligheten samt bestämmer sedan det U-värde som gör r enligt ekv. (39) till ett maximum, varvid i stället för i införes n och x och y definieras av ekv. (33). Slutligen beräknas a och m-värdena enligt ekv. (40).

Sedan dessa konstanter bestämts kan man för de tre valda N-värdena beräkna de korrigerade S-värdena för godtyckliga P-värden inklusive P = 0, som ju blir de beräknade U-värdena.

Man väljer då lämpliga värden på P, som icke behöver sammanfalla med de ursprungligen använda och som ju bestämts av n. För varje sådant P beräknar man nya korrigerade värden på parametrarna k, m och E i ekv. (14) genom direkt insättning i ekv. (15). Sedan konstanterna beräknats kan den korrigerade kurvskaran i fält 1 och 2 beräknas och uppritas. Av huvudintresse är givetvis S-N-kurvan för P = 0 samt P-S-kurvan för $N = \infty$.