Aktiebolaget Bofors TM	Meddelande angående naturvetenskapliga, tekniska, ekonomiska, juridiska och organisatoriska frågor, experiment, undersökningar, studier etc. av värde för bolagets verksamhet

TU

Reg.

2.9.1948

Datum

Antal blad

Blad nr 1

Löp. nr

Order nr T118

Utredn. beordrad av

Utredn. utförd av

Meddel. författat av W. Weibull.

Bilaga

Rubrik: [illegible] utmattning[illegible]

En statistisk teori för utmattningshållfastheten

Sammanfattning:

Innehållsförteckning.

Inledning.

Grundläggande statistiska betraktelser.

Det fullständiga utmattningsdiagrammet (P-S-N-diagrammet).

S-N-relationen.

P-S-relationen.

Volymeffekten.

Beräkning av parametrarna.

Ett numeriskt exempel.

Blad 1 utsänt till:

En statistisk teori för utmattningshållfastheten.

När förf. för snart tio år sedan publicerade en hållfasthetsteori baserad på statistiska synpunkter, var han fullt på det klara med möjligheten att använda denna teori även på problem inom andra områden. Särskilt lockande föreföll det vara att tillämpa tankegången på utmattningsproblem och detta av flera skäl. Först och främst är utmattningsbrott ett mycket vanligare och därmed viktigare [illegible] konstruktion[illegible] än den som erhålles genom statisk överbelastning. [illegible] ningen nästan alltid vid spänningar, som ligga under elasticitetsgränsen och det är därför möjligt att med stor noggrannhet beräkna den spänningsfördelning som förefunnits inom brottytan före brottets uppkomst. Detta är icke fallet vid statisk överbelastning, där vid de viktigaste konstruktionsmaterialen brottet föregås av en plastisk formförändring, som på ett oöverskådligt och svårberäkneligt sätt förändrar spänningsfördelningen, varför den statistiska teorien med framgång endast kunnat användas på material som kunna anses vara spröda. Slutligen är spridningen hos försöksvärdena vid utmattningsprov vida mycket större än vid statiska prov.

När man först blev på det klara med det faktum – och det är icke så länge sedan – att även en liten belastning tillräckligt ofta upprepad kunde leda till brott var problemställningen helt enkelt den, att man skulle välja påkänningarna så låga att de kunde uthärdas ett oändligt antal gånger. Man var icke inriktad på möjligheten att använda maskinelement med en begränsad livslängd. Det ökade kravet på mera ekonomiska eller på möjligast lätta konstruktioner har inf[illegible] frågan om begränsad livslängd. Jag skulle tro att denna fråga uppträdde först inom kullagerindustrien, där en obegränsad livslängd hos lagren skulle medföra dimensioner som skulle bli ekonomiskt prohibitiva, och senare inom flygindustrien, där vi[illegible] frågan är av vital betydelse.

Numera vill man således icke blott veta vid vilken belastning konstruktionen håller en obegränsad tid utan även, vilken livslängd d.v.s. vilket antal lastväxlingar som erhållas vid en given högre belastning. På detta sätt får man en kontinuerlig övergång från dynamisk till statisk hållfasthet.

Detta accentuerar [illegible] av en statistisk behandling [illegible] problemet varvid [illegible] icke idealiserade material det alltid finnes en spridning i hållfasthetsvärdena och denna är i de flesta fall så stor att ett statistiskt betraktelsesätt måste tränga sig fram.

Den slutliga frågan, som man vill ha svar på, blir därför: Vilken är sannolikheten för att vid en given belastning det belastade föremålet håller ett föreskrivet antal lastväxlingar? Man får således tre faktorer, vars inbördes relation man vill [illegible] ten för brott, P, 2) belastningens storlek [illegible] spänningen växlar, S, samt 3) livslängden räknad i antalet lastväxlingar, N.

Grundläggande statistiska betraktelser.

Om man har ett antal, n, maskindetaljer t.ex. provstavar och utsätter en av dem för en långsamt stigande belastning så kommer den slutligen att brista när maximispänningen, S, når ett visst värde. Upprepas detta med samtliga stavar får man för varje individ ett bestämt värde S. Vi tänker oss nu att vi tar n kort, lika många som antalet provade stavar och skriver på framsidan av vart och ett av dem det individuella värdet S_i. Därefter ordnar vi korten efter stigande värden på S_i och numrerar dem från $i = 1$ till $i = n$. Således är $S_i \leq S_{i+1}$. På baksidan av kortet skriver vi därefter talet $P = \frac{i}{n}$. På kortet med lägsta värdet, S_1, står således på baksidan $\frac{1}{n}$ och på det med högsta värdet, S_n, står talet $\frac{n}{n} = 1$. Tydligen är $\frac{1}{n} \leq P \leq 1$. Om samtliga stavar provas får vi genom de n värdena S_i en fullständig och uttömmande statistisk upplysning vilket innebär att vi känner det exakta sambandet mellan P och S värdena. Om vi nu låter n växa obegränsat blir stegen i funktionen P allt mindre och vi kan med god approximation anse P vara en kontinuerlig variabel likformigt fördelad över det halvöppna intervallet (0,1). Vi har således $0 < P \leq 1$. Spänningen S_i kan även tänkas övergå till en kontinuerlig variabel, S. Sambandet mellan dessa båda storheter betecknar vi

$$P = F(S) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Denna funktion F kallas fördelningsfunktionen för S och har den viktiga egenskapen att ange sannolikheten för brott vid spänningen S, ty vi definiera denna sannolikhet, som förhållandet mellan det antal stavar, som gått sönder, när samtliga utsatts för spänningen S och det totala antalet stavar. Tydligen [illegible]

Förhållandet mellan det antal stavar, som icke gått sönder vid spänningen S, och totala antalet stavar blir givetvis

$$1 - P = 1 - F(S) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Detta resonnemang kan utan vidare föras även, om man utsätter staven för en varierande belastning. Man låter S beteckna den dynamiska påkänningen av ena eller andra slaget definierad genom de gränser mellan vilka den varierar och bestämmer det antal stavar som [illegible] godtyckligt [illegible] antal spänningsväxlingar, N, säg t.ex. efter 100.000 växlingar.

Fördelningsfunktionen får då två oberoende variabler och tar formen

$$P = F(S, N) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

I allmänhet kan denna tvådimensionella sannolikhet icke anges i sluten analytisk form. I praktiken får man nöja sig med att ange denna funktion för ett antal lämpligt valda värden på N.
Om vi införa beteckningen $P = F_{\log N}(S)$ blir tydligen
$F_0(S)$ fördelningsfunktion för den statiska hållfastheten och
$F_\infty(S)$ – " – för utmattningsgränsen
$F_6(S)$ – " – den belastning som ger en livslängd av 1 milj. spänningsväxlingar.

Storheten S är vid likformig spänningsfördelning inom hela den ansträngda volymen lämpligen denna spänning, vid en given olikformighet inom volymen någon referensspänning exempelvis maximispänningen inom den påkända volymen, medelspänningen över någon yta eller någon lämplig spänning.

Det måste påpekas att F(S) icke anger sannolikheten för första uppträdandet av en spricka inom den givna volymen. Ty det kan mycket väl hända att materialet börjar brista i någon punkt men att brottytans utbredning upphör. Vad man avser är att spänningen S skall ge upphov till en spricka, som fortsätter, utan att avstanna, att utbreda sig över stavens hela tvärsnittsyta. Detta kan synas självklart men det kan vara skäl att uttryckligen påpeka detta emedan man ibland möter påståenden där denna synpunkt icke beaktats.

Fördelningsfunktionen F(S) är för den givna belastningstypen S en rent fenomenologisk men uttömmande beskrivning av provstavarnas (inkluderande material, bearbetning, ytbeskaffenhet etc.) hållfasthetsegenskaper och skulle kunna experimentellt bestämmas [illegible]

I den klassiska hållfasthetsteorien ersättes F(S) av aritmetiska mediet $\frac{\Sigma S_i}{n}$ vilket är en ofullständig representation av F(S) men i vissa fall där spridningen kring detta värde är mycket liten som t.ex. för brottgränsen vid tänjbara material fullt tillräckligt. Det är först vid spröda material som t.ex. gjutjärn, cement etc. samt vid utmattningshållfasthet, som spridningen är så stor att man för en tillfredsställande teori måste införa fördelningsfunktionen F(S).

Så länge totala antalet stavar icke är större än att samtliga kunna provas så kan man ju av värdet S_i som står på de förut nämnda kortens framsida, enbart genom att ordna dem, sluta sig till vilket P-värde, som skulle stå på kortets baksida. Blir antalet mycket stort eller t.o.m. växer obegränsat – som vi i det följande skall antaga – blir det omöjligt att prova samtliga stavar. Man får då nöja sig med att prova ett begränsat, slumpvis utvalt antal stavar n.

Dessa värden skriver vi på kortens framsida d.v.s. bestämmer S_v för var och en. Däremot är det förborgat vad som skall stå på baksidan. Om vi kände P-värdena, så fick vi ju i alla fall n stycken värdepar (P,S) för bestämning av funktionen F. Men det gör vi inte utan måste tillgripa sannolikhetskalkylen för att bestämma de olika P-värdena. Noggrannheten vid bestämningen av S kan vi öka genom att förbättra mätapparaturen, noggrannheten vid bestämningen av P kan vi öka enbart genom att öka provens antal n på så sätt som framgår av följande formler.

Till en början ordnar vi provsamlingen efter stigande värden på S_v och numrerar dem från v = 1 till v = n. Nu är enligt sannolikhetskalkylen sannolikheten för det samtidiga inträffandet av flera av varandra oberoende händelser lika med produkten av sannolikheten för var och en av dem.

Därför blir sannolikheten för att det v:te av de n värdena skall falla mellan P och P + dP produkten av följande tre sannolikheter.

1) Sannolikheten dP för att ett värde skall falla inom intervallet (P, P + dP)
2) Sannolikheten P^{v-1} för att v – 1 värden skola ligga inom intervallet (O, P)
3) Sannolikheten $(1 - P)^{n-v}$ för att de övriga n – v värdena skola ligga inom intervallet (P, 1).

Sannolikheten för det samtidiga inträffandet av dessa händelser blir således $P^{v-1}(1-P)^{n-v}dP$. Nu kan emellertid de n värdena kombineras på flera sätt. För $v = 1$ kan t.ex. vilken som helst av de n värdena ligga inom dP, varför man har för detta värde n kombinationer. För $v = 2$ kan tydligen om man låter ett av de n värdena falla inom dP de övriga $n - 1$, vilket som helst, falla inom intervallet $(0, P)$. Man får således $n(n-1)$ kombinationer. Generellt får man $\frac{n!}{(v-1)!\,(n-v)!}$ varför totala sannolikheten för att det v:te värdet faller inom intervallet $(P, P + dP)$ blir

$$\frac{n!}{(v-1)!\,(n-v)!}\,P^{v-1}(1-P)^{n-v}dP$$

Härav följer att fördelningsfunktionen F_v för det v:te värdet d.v.s. sannolikheten att detta värde $\leqq P$ blir

$$F_v = \frac{n!}{(v-1)!\,(n-v)!}\int_0^P P^{v-1}(1-P)^{n-v}dP \quad \ldots\ldots(4)$$

För $v = 1$ blir således

$$F_1 = 1 - (1-P)^n \quad \ldots\ldots(5)$$

Genom partiell integration får man lätt rekursionsformeln

$$F_{v+1} = F_v - \frac{n!}{v!\,(n-v)}(1-P)^{n-v}P^v \quad \ldots\ldots(6)$$

Fördelningsfunktionerna för n = [illegible] visas i fig 1 och för $P = 0{,}1$ för $n = 9$, 29 och 99 d.v.s. $v = 1, 3$ och 10 resp. i fig 2. Det aritmetiska mediet P_v av det v:te värdet beräknas enligt formeln

$$P_v = \int_0^1 P\,dF_v(P) \quad \ldots\ldots(7)$$

och ger den enkla formeln

$$P_v = \frac{v}{n+1} \quad \ldots\ldots(8)$$

Som ett mått på den noggrannhet varmed detta värde blir bestämt kan man sätta standardavvikelsen D_v som beräknas enligt formeln

$$D_v = \sqrt{\frac{v\ (n - v + 1)}{(n + 1)^2\ (n + 2)}} \quad \ldots\ldots (9)$$

För extremvärdena v = 1 resp. v = n får man

$$D_1 = D_n = \sqrt{\frac{\text{[illegible]}}{(\text{[illegible]})\ (n + 2)}} \quad \ldots\ldots (10)$$

och för medianen, $v = \frac{n + 1}{2}$, blir

$$D_{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{n + 2}} \quad \ldots\ldots (11)$$

Jämföres (9) och (10) finner man $D_1 = D_n < D_{\frac{n+1}{2}}$ för $n > 1$

För stora värden på n blir

$$D_1 = D_n \rightarrow \frac{1}{n} \quad \ldots\ldots (12)$$

och

$$D_{\frac{n+1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots (13)$$

Extremvärdena bestämmas således med större precision än medianen. Hur spridningen minskas med växande n framgår även av fig 2.

Det är naturligtvis icke à priori givet att aritmetiska mediet skall väljas som det sannolikaste värdet för P_v. Man kunde exempelvis även tänka sig medianen men formeln för detta värde är icke fullt så enkel som (8) och det synes icke finnas någon direkt anledning att föredraga medianen framför aritmetiska mediet. Vi skola därför i fortsättningen förutsätta att P-värdena på kortens baksidor beräknas enligt formeln (7).

För bestämning av fördelningsfunktionen får vi således n värdepar (S_v, P_v) där P_v är behäftat med ett fel, som kan minskas endast genom att öka antalet prov n.

Om vi för F(S) antar ett plausibelt analytiskt uttryck innehållande ett antal konstanter, så skola dessa bestämmas så att de på bästa sätt ansluta sig till de experimentellt bestämda värdena. [illegible] måste satisfieras, t.ex. att konstanterna skall väljas så att summan av felkvadraterna blir ett minimum eller att korrelationskoefficienten blir så nära = 1 som möjligt. Valet av metod är i viss mån godtyckligt.

För bedömning av denna fråga må påpekas att i allmänhet torde S-värdena kunna bestämmas med erforderlig noggrannhet. Osäkerheten ligger därför i de flesta fallen i P-värdena. Eftersom denna minskas med växande n, måste man uppställa det kravet på metoden att felen går mot noll när $n \rightarrow \infty$. Detta förutsätter naturligtvis att den valda fördelningsfunktionen är den exakt rätta. Tyvärr vet man inte på förhand om detta är fallet.

I ett senare kapitel skall anges ett par olika metoder för konstantbestämningen.

Det fullständiga utmattningsdiagrammet (P-S-N diagrammet).

Vid utmattningspåkänningar tillkommer, jämfört med statiska påkänningar som nämnts ytterligare en variabel livslängden N räknad i antal spänningsväxlingar. Man har således tre storheter, vars relation till varandra skall bestämmas nämligen P, S och N. Sambandet mellan dessa kvantiteter kan göras grafiskt genom att välja två av dem som koordinater och upprita en kurva för dessa båda för ett antal konstanta värden på den tredje. Man får sålunda en kurvskara för varje sådant av de tre möjliga koordinatsystem enligt fig 3. I fält 1 ser man sambandet mellan N och S för olika värden på P mellan 0 till 1. Om vi inför beteckningen S(P, N) och låter detta beteckna den spänning som erfordras för sannolikheten P och livslängden N blir tydligen den undre linjen i fält S(0, N) under det att S(P, ∞) betecknar de asymptotiska värden mot vilka de olika P-kurvorna tenderar för $N \rightarrow \infty$. Vi inför även beteckningarna U = S(0, N) och E = S(P, ∞). I fält 2 har man ett samband mellan P och S för olika värden på N mellan 0 till ∞. Slutligen i fält 3 har man ett samband mellan P och N för konstanta värden på S.

Från teoretisk synpunkt äro de tre framställningarna likvärdiga eftersom man ur ett av dem kan konstruera de båda övriga. Ur praktisk synpunkt ställer det sig annorlunda. För experimentell bestämning av kurvorna förfar man nämligen så, att man vid ett antal, i, olika belastningar S_μ kör ett antal prov, n, och bestämmer de olika livslängderna N. Vad man nu framförallt vill veta är utmattningsgränsen d.v.s. E = S(P, ∞) och värdena U = S(0, N)